Тестовая задача с аналитическим решением уравнений переноса излучения и энергии в двумерном осесимметричном случае

А.Н. Старцев, А.А. Шестаков
ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина», Снежинск, Россия

Одной из ключевых задач при разработке любого нового алгоритма или программы является тестирование. Конечно, хотелось бы иметь универсальную тестовую задачу, которая сразу проверяет все возможности программы, но в сложных алгоритмах такое встречается очень редко. Поэтому тестовых задач должно быть столько, сколько необходимо для проверки всех возможных вариантов использования нового алгоритма или программы. Особенно много таких вариантов возникает в задачах радиационной газовой динамики. При этом наибольшее число параметров и независимых переменных содержится в системе уравнений переноса теплового излучения. Например, в спектральном трехмерном случае эта система содержит семь независимых переменных и десятки параметров, описывающих разностную сетку по времени, по геометрическому пространству и пространству направлений полёта фотонов, константы сходимости итерационных алгоритмов, константы спектральных пробегов, типы приближений уравнения переноса и так далее. В тестовый набор программного комплекса для задач радиационной газовой динамики может входить более сотни задач.

У многих программистов возникает вопрос: как часто надо проводить тестирование? Каждый раз, когда в программу были внесены изменения или устранена очередная ошибка. А как известно всем программистам, последняя найденная ошибка со временем всегда становится предпоследней. Хороший тест демонстрирует правильную работу программы также при взаимодействии с другими кодами. Чтобы облегчить тестирование необходимо детально знать результаты каждого теста, поэтому желательно как можно подробнее документировать эти исследования.

При тестировании программ в качестве модельных задач желательно выбирать задачи, которые имеют аналитические решения. В работе [1] на основе разложения резольвенты оператора переноса в ряд Неймана созданы аналитических формулы для определения параметров теплового излучения в многомерной геометрии. Эти формулы позволяют при известной равновесной интенсивности, которая определяется только распределением температуры, и при заданных коэффициентах поглощения и рассеяния найти в явном виде аналитические выражения основных спектральных величин: интенсивности, плотности и потока излучения. На основе этих решений построена тестовая задача в двумерном осесимметричном случае и проведены численные расчеты по методике [2]. Особенностью тестовой задачи является то, что она позволяет сравнивать анизотропное распределение интенсивности по направлениям полета фотонов с точным решением. Это помогает оценивать точность квадратурных формул, используемых при аппроксимации поля излучения в фазовом пространстве направлений полёта фотонов.

1. Система уравнений переноса спектрального излучения и энергии

Рассмотрим спектральную систему уравнений переноса излучения и энергии в двумерном осесимметричном случае с учетом изотропного рассеяния [3]:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t}+\left(\vec{\Omega},\nabla I_\nu\right)+(\kappa_\nu+\chi_\nu)I_\nu=\kappa_\nu I_{p\nu}+\frac{1}{4\pi}\chi_\nu U_\nu, \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\int_0^\infty \kappa_\nu(U_\nu-B_\nu)d\nu+Q, \qquad (1.2)$$

где t - время, $\vec{r}$ - радиус-вектор, c - скорость света,

$\vec{\Omega}$ – единичный вектор в направлении движения фотонов,
ν - частота, $\varepsilon = h\nu$ - энергия фотона, h - постоянная Планка,
κ_ν - коэффициент поглощения фотонов, κ_ν >0,
χ_ν - коэффициент рассеяния фотонов,
$I_\nu(t,\vec{r},\vec{\Omega},\varepsilon)$ - спектральная интенсивность излучения,
$U_\nu = \int\limits_\Omega I_\nu(t,\vec{r},\vec{\Omega},\varepsilon) d\vec{\Omega}$ - спектральная плотность излучения, умноженная на скорость света,
$I_{p\nu} = \frac{1}{4\pi} B_\nu$ - спектральная интенсивность равновесного излучения,
$B_\nu = \frac{8\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{\mathrm{e}^{h\nu/KT} - 1} = \frac{p_0 \varepsilon^3}{\mathrm{e}^{\varepsilon/KT} - 1}$ - спектральная плотность равновесного излучения, умноженная на скорость света (функция Планка с множителем $p_0 = \frac{8\pi}{c^2 h^2}$), K - постоянная Больцмана, T – температура вещества, E – внутренняя энергия, Q – тепловой источник.

В двумерной осесимметричной геометрии оператор переноса имеет вид

$$\left(\vec{\Omega}, \nabla I_\nu\right) = \xi \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \phi},$$

где $\vec{\Omega} = \left\{ \xi = \sqrt{1-\mu^2} \cos\phi,\ \mu = \cos\theta,\ \eta = \sqrt{1-\mu^2} \sin\phi \right\}$, θ – угол между $\vec{\Omega}$ и осью симметрии OZ, ϕ – угол между проекцией $\vec{r}$ и проекцией $\vec{\Omega}$ на плоскость, перпендикулярную оси симметрии OZ, $-1 \le \mu \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi$.

2. Построение тестовой задачи

При построении тестовых задач граничные условия будем задавать из точных решений [1]. Несмотря на то, что эти решения получены в стационарном случае, их можно использовать для построения численных тестов в нестационарных задачах переноса теплового излучения, учитывая, что нестационарное решение при задании стационарных граничных условий и источников выходит с течением времени на стационарное решение. А по близости численных и точных решений будем характеризовать точность вычисления различных характеристик излучения (интенсивности, температуры, плотности и потоки излучения).

В рассматриваемом тесте моделируется перенос излучения в шаре с нагретым экватором и холодными полюсами. При этом пространственное распределение температуры внутри сферы не зависит от коэффициента поглощения. От коэффициента поглощения зависят только скорость прогрева шара, пространственные распределения интенсивности и потока излучения.

В работе [1] точные решения получены при условии $\kappa_\nu \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^3 I_{p\nu} = 0$. В цилиндрических координатах для осесимметричной геометрии при этом условии точное значение интенсивности в стационарном случае имеет вид

$$I_\nu(r,z,\xi,\mu)=I_{p\nu}-\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)I_{p\nu}+\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^2 I_{p\nu}=I_{p\nu}-\frac{1}{\kappa_\nu}\left(\xi\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}+\mu\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{1}{\kappa_\nu}\left\{\xi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\left(\xi\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}+\mu\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial z}\right)\right)+\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\left(\xi\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}+\mu\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial z}\right)\right)+\frac{\eta^2}{r\kappa_\nu}\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}\right\}.$$

Отсюда после интегрирования по Ω получаем формулы для плотности U_ν, потока $\vec{S}_\nu=\int\limits_\Omega\vec{\Omega}I_\nu d\vec{\Omega}$ и дивергенции потока излучения:

$$U_\nu=B_\nu-\frac{1}{\kappa_\nu}div\vec{S}_\nu,\quad \vec{S}_\nu=\left(S_{r,\nu},S_{z,\nu}\right)=-\frac{1}{3\kappa_\nu}\left(\frac{\partial B_\nu}{\partial r},\frac{\partial B_\nu}{\partial z}\right),$$

$$div\vec{S}_\nu=\frac{1}{r}\frac{\partial rS_{r,\nu}}{\partial r}+\frac{\partial S_{z,\nu}}{\partial z}=-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{3\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{3\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial z}\right)\right).$$

В двумерной осесимметричной геометрии должны дополнительно выполняться следующие условия симметрии $S_{r,\nu}\big|_{r=0}=0$ и $\left.\frac{\partial I_\nu}{\partial\phi}\right|_{r=0}=0$. Эти условия зависят от выбора формул для температуры и должны проверятся в каждом конкретном случае отдельно.

Например, первое условие выполняется для температуры вида $T^4=a_0r^n+a_1f(z)$, где a_0,a_1 - некоторые константы, $f(z)$ - произвольная функция от z, n > 1, так как

$$S_{r,\nu}\big|_{r=0}=-\frac{1}{3\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T^4}\frac{\partial T^4}{\partial r}\bigg|_{r=0}=-\frac{1}{12\kappa_\nu}\frac{a_0p_0\varepsilon^4\,\mathrm{e}^{\varepsilon/KT}\,nr^{n-1}}{KT^5\left(\mathrm{e}^{\varepsilon/KT}-1\right)^2}\bigg|_{r=0}=0.$$

Второе условие для температуры вида $T^4=a_0r^n+a_1f(z)$ удается выполнить в сером случае при $\kappa=const$ и n ≥ 2, так как $\frac{\partial I}{\partial\phi}=\frac{a_0nc\sigma\eta}{4\pi\kappa}\left[r-2\frac{\xi(n-2)}{\kappa}\right]r^{n-2}\Big|_{r=0}=0$.

В работе [1] рассмотрены различные решения для серых и спектральных стационарных уравнений переноса теплового излучения в одномерной плоской, двумерной осесимметричной и трехмерной геометриях. В данной работе для упрощения задания граничных и начальных условий в численных расчетах рассмотрим простейшее из этих решений в сером случае с постоянным коэффициентом поглощения без рассеяния.

В сером стационарном приближении с постоянным коэффициентом поглощения ($\kappa_\nu=\kappa$) и без рассеяния (χ=0) решение уравнения переноса имеет вид

$$I=\frac{B}{4\pi}-\frac{1}{4\pi\kappa}\left\{\xi\frac{\partial B}{\partial r}+\mu\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{1}{\kappa}\left[\xi\frac{\partial}{\partial r}\left(\xi\frac{\partial B}{\partial r}+\mu\frac{\partial B}{\partial z}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\xi\frac{\partial B}{\partial r}+\mu\frac{\partial B}{\partial z}\right)+\frac{\eta^2}{r}\frac{\partial B}{\partial r}\right]\right\},$$

$$U=B-\frac{1}{\kappa}div\vec{S},\quad \vec{S}=-\frac{1}{3\kappa}\nabla B,$$

где $\vec{S}=\int\limits_0^\infty\vec{S}_\nu d\nu$ - полный поток излучения, $B=\int\limits_0^\infty B_\nu d\nu=c\sigma T^4$ - полная плотность равновесного излучения, умноженная на скорость света, $\sigma=4\sigma_0/c$, σ_0 - постоянная Стефана-Больцмана.

Из уравнения энергии (1.2) для функций вида $T^4 = a_0 r^2 + a_1 z^2 + a_2 r + a_3 z + a_4$, где a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 - некоторые константы, получаем соотношение $div\vec{S} = Q$, из которого следует

$U = B - \frac{Q}{\kappa}$, $div\left(\nabla T^4\right) = -\frac{3\kappa}{c\sigma} Q = -Q_1$, $a_1 = -\left(2a_0 + 0.5Q_1\right)$.

В случае без источника решение принимает вид

$U = B$, $T = \sqrt[4]{a_0\left(r^2 - 2z^2\right) + a_2 r + a_3 z + a_4}$.

Для данного решения должны выполняться 3 условия.

1. На оси r=0: $S_r\left(r=0\right) = -\frac{1}{3\kappa}\frac{\partial B}{\partial r}\bigg|_{r=0} = -\frac{c\sigma}{3\kappa}\frac{\partial T^4}{\partial r}\bigg|_{r=0} = -\frac{c\sigma}{3\kappa}\left(2a_0 r + a_2\right)\Big|_{r=0} = -\frac{c\sigma}{3\kappa} a_2 = 0$. Отсюда получаем $a_2 = 0$.
2. $T \geq 0$. Отсюда с учетом условия $a_2 = 0$ получаем $a_0\left(r^2 - 2z^2\right) + a_3 z + a_4 \geq 0$.
3. $I \geq 0$. Отсюда с учетом условия $a_2 = 0$ получаем
$$T^4 \geq \frac{1}{\kappa}\left\{\xi\frac{\partial T^4}{\partial r} + \mu\frac{\partial T^4}{\partial z} - \frac{1}{\kappa}\left[\xi\frac{\partial}{\partial r}\left(\xi\frac{\partial T^4}{\partial r} + \mu\frac{\partial T^4}{\partial z}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\xi\frac{\partial T^4}{\partial r} + \mu\frac{\partial T^4}{\partial z}\right) + \frac{\eta^2}{r}\frac{\partial T^4}{\partial r}\right]\right\}$$
или с учетом $\xi^2 + \eta^2 = 1 - \mu^2$ в виде $a_0\left(r^2 - 2z^2\right) + a_3 z + a_4 \geq \frac{2a_0}{\kappa}\left[\xi r - 2\mu z + \frac{a_3\mu}{2a_0} - \frac{1}{\kappa}\left(1 - 3\mu^2\right)\right]$.

Так как правая часть последнего неравенства знакопеременна и может быть много больше нуля, условие на неотрицательность интенсивности более жёсткое, чем условие на неотрицательность температуры. В частности, оно не позволяет строить решения с нулевой температурой даже в одной точке системы. Покажем это.

Для простоты исследования положим $a_3 = 0$. Тогда $T^4 = a_0\left(r^2 - 2z^2\right) + a_4$. Из условия $T \geq 0$ получаем $a_4 \geq a_0\left(2z^2 - r^2\right)$ или $a_4 \geq 2a_0 z_{\max}^2$. Таким образом при $a_0 \geq 0$, $a_4 \geq 0$ минимальное неотрицательное значение температура принимает при r=0, z=z_{max}, $a_4 = 2a_0 z_{\max}^2$.

Из условия $I \geq 0$ получаем неравенство $T^4 \geq \frac{2a_0}{\kappa}\left\{\xi r - 2\mu z - \frac{1}{\kappa}\left(1 - 3\mu^2\right)\right\}$ или в виде

$$a_4 \geq a_{\max} = 2a_0 \max_{r,z,\mu,\xi}\left\{z^2 - \frac{r^2}{2} + \frac{1}{\kappa}\left[\xi r - 2\mu z - \frac{1}{\kappa}\left(1 - 3\mu^2\right)\right]\right\} = 2a_0\left[\left(z_{\max} + \frac{1}{\kappa}\right)^2 + \frac{1}{\kappa^2}\right]. \quad (2.1)$$

Отсюда следует, что неотрицательное значение интенсивность излучения принимает при условии $a_4 \geq a_{\max} > 2a_0 z_{\max}^2$. А это условие не допускает значение коэффициента $a_4 = 2a_0 z_{\max}^2$, при котором достигается нулевое значение температуры.

Очевидно, что при увеличении поглощения влияние слагаемого в формуле (2.1), зависящего от направлений (ξ, μ), будет уменьшаться, а величина $a_{\max}$ будет стремиться к конечному пределу $a_{\max} \to 2a_0 z_{\max}^2$. При построении тестов коэффициент a_4 проще всего выбирать из условия, чтобы интенсивность обращалась в нуль не более чем в одной точке (r,z,ξ, μ), то есть $a_4 = a_{\max}$.

Рассмотрим решение в шаре радиусом R=1 ($r^2+z^2=1$) с коэффициентами $a_0=1$, $a_1=-2a_0=-2$, $a_2=a_3=0$, $a_4=a_{\max}$ и тремя различными коэффициентами поглощения κ=1,10,100. Тогда формулы для температуры и интенсивности принимают вид:

$$T^4=r^2-2z^2+2\left[\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)^2+\frac{1}{\kappa^2}\right], \qquad (2.2)$$

$$I=\frac{c\sigma}{4\pi}\left\{T^4-\frac{2}{\kappa}\left[\xi r-2\mu z-\frac{1}{\kappa}\left(1-3\mu^2\right)\right]\right\}. \qquad (2.3)$$

Если при рассмотренных значениях κ выбирать коэффициент a_4 постоянным и достаточно большим, например a_4=10, то поле температур во всех трех вариантах не будет зависеть от коэффициента поглощения, что упрощает процедуру сравнения численных решений с точным. Рассмотренное решение (2.2), (2.3) дает нулевой интегральный поток через всю поверхность шара, что также удобно контролировать в численных расчетах

$$\int\limits_{4\pi R^2}\left(\vec{S}\vec{n}\right)ds=-\frac{1}{3\kappa}\int\limits_{4\pi R^2}\left(\nabla B,\vec{n}\right)ds=-\frac{c\sigma}{3\kappa}\int\limits_{4\pi R^2}\left(\nabla T^4,\vec{n}\right)ds=-\frac{2c\sigma}{3\kappa}\int\limits_{4\pi R^2}\left(r^2-2z^2\right)ds=0,$$

где $\vec{n}$(r,z) - внешняя нормаль к поверхности шара, ds – элемент поверхности сферы.

Рассмотрим поведение решения в четырёх контрольных точках: на верхней границе шара (на экваторе), в центре и на оси симметрии (на полюсах):

- в центре шара при r=0, z=0 получаем $T=\sqrt[4]{10}\approx 1.78$, поток - нулевой $\vec{S}=(0,0)$;
- на экваторе при r=1, z=0 температура максимальна - $T=\sqrt[4]{11}\approx 1.82$, а поток направлен внутрь шара $\vec{S}=-\frac{2c\sigma}{3\kappa}(1,0)$, при этом выполняется условие симметрии относительно вертикальной оси $\left(S_z\right)\big|_{z=0}=0$;
- на полюсах при r=0, z=$\pm$1 температура минимальна - $T=\sqrt[4]{8}\approx 1.68$, а удельный поток в два раза больше входящего на экваторе и направлен из шара наружу $\vec{S}=\frac{4c\sigma}{3\kappa}(0,\pm 1)$, при этом на оси r=0 выполняется условие осевой симметрии $\left(S_r\right)\big|_{r=0}=0$ (рис.1).

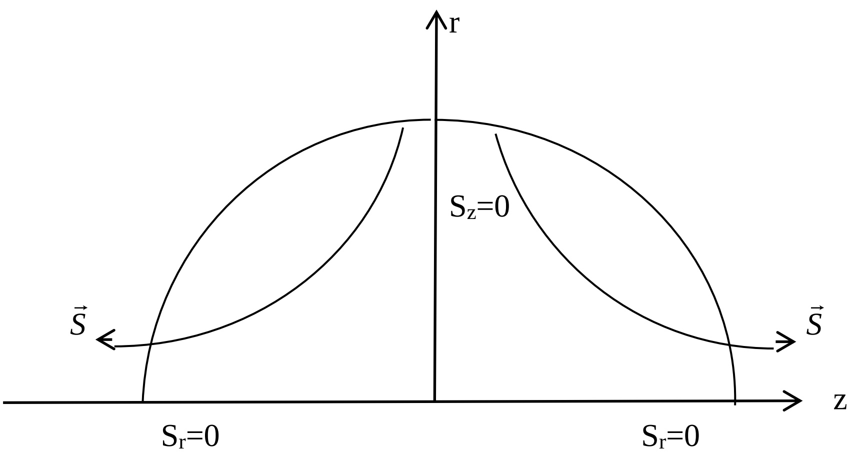

Рисунок 1 – Схема потоков

На рисунке 2 приведена зависимость интенсивности от μ, ξ, полученная из точного решения при κ=1 в точке r=1, z=0 (на экваторе). Для наглядности распределения поля излучения на рисунке 2 изображены изолинии интенсивности.

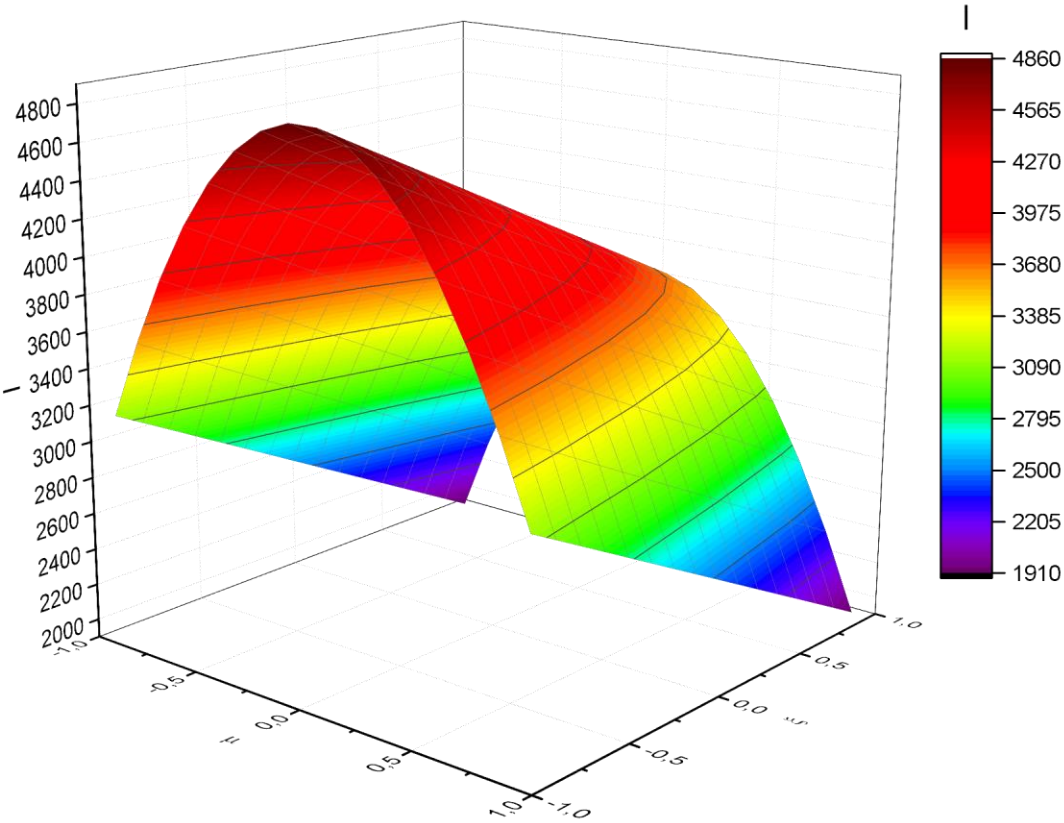

Рисунок 2 – Зависимость интенсивности $I\left(r=1,z=0,\xi,\mu\right)\approx 327.0634\left\{11-2\left[\xi-\left(1-3\mu^2\right)\right]\right\}$ от μ, ξ при κ=1 в точке r=1, z=0 (на экваторе).

В таблице 1 приведены точные и численные значения температур в приграничной точке при r=0.995, z=0.015 (у экватора), полного потока на экваторе $\left(\vec{S}\vec{n}\right)=-\dfrac{2c\sigma}{3\kappa}\left(r,-2z\right)\left(1,0\right)=-\dfrac{2740}{\kappa}$, интенсивности для одного из выходящих направлений $\xi\approx-0.10194, \mu\approx 0.98955$ $\left\{\left(\vec{\Omega}\vec{n}\right)=\left(\xi,\mu\right)\left(1,0\right)=\xi<0\right\}$ и их относительные погрешности $\delta f=\dfrac{f_{чис}-f_{точ}}{f_{точ}}100\%$. Для входящих направлений интенсивности совпадают с точными значениями, так как задаются из аналитического решения. Расчеты проводились до выхода решения на стационар (примерно t=10 нс) на равномерной сферической сетке 100^2 (сто ячеек по радиусу, сто ячеек по углу) и квадратуре ES_{16}.

Таблица 1 - Температура, поток и интенсивность на экваторе

κ	$T_{точ}$	$T_{чис}$	δT	$S_{точ}$	$S_{чис}$	δS	$I_{точ}$	$I_{чис}$	δI
1	1.82073	1.82119	0.025	2740	2705	1.3	2411.04	2413.05	0.08

10	1.82073	1.82072	0.001	274.0	272.9	0.4	3590.32	3590.06	0.007
100	1.82073	1.82076	0.002	27.40	27.62	0.8	3595.16	3595.08	0.002

Из таблицы видно хорошее совпадение численного и точного решений на выбранной сетке. Наибольшее отличие от точного решения дают значения численных потоков излучения.

В таблице 2 приведены величины из таблицы 1, полученные при к=1 на разных квадратурах. В связи с тем, что на разных квадратурах ES_n нет направлений с одинаковыми значениями ξ, μ, точное значение интенсивности на квадратуре ES_4 приведено для переменных $\xi \approx -0.34816, \mu \approx 0.87039$; ES_8 - для $\xi \approx -0.19282, \mu \approx 0.96210$; ES_{16} - для $\xi \approx -0.10194, \mu \approx 0.98955$; ES_{32} - для $\xi \approx -0.05249, \mu \approx 0.99724$; ES_{64} - для $\xi \approx -0.02665, \mu \approx 0.99929$.

Таблица 2 - Температура, поток и интенсивность на экваторе при разных квадратурах ES_n

n	$T_{точ}$	$T_{чис}$	δT	$S_{точ}$	$S_{чис}$	δS	$I_{точ}$	$I_{чис}$	δI
4	1.82073	1.82219	0.08	2740	2640	3.7	3007	3005	0.07
8	1.82073	1.82159	0.05	2740	2678	2.3	2577	2576	0.04
16	1.82073	1.82119	0.025	2740	2705	1.3	2411	2413	0.08
32	1.82073	1.82095	0.012	2740	2720	0.7	2352	2351	0.04
64	1.82073	1.82082	0.005	2740	2729	0.4	2327	2326.5	0.02

Из таблицы видна монотонная сходимость интегральных величин (температуры и потока) к точному решению. Численные значения интенсивности показывают устойчивую погрешность не превышающую 0.1%.

На рисунке 3 приведены распределение и изолинии температуры, полученные из численного расчета.

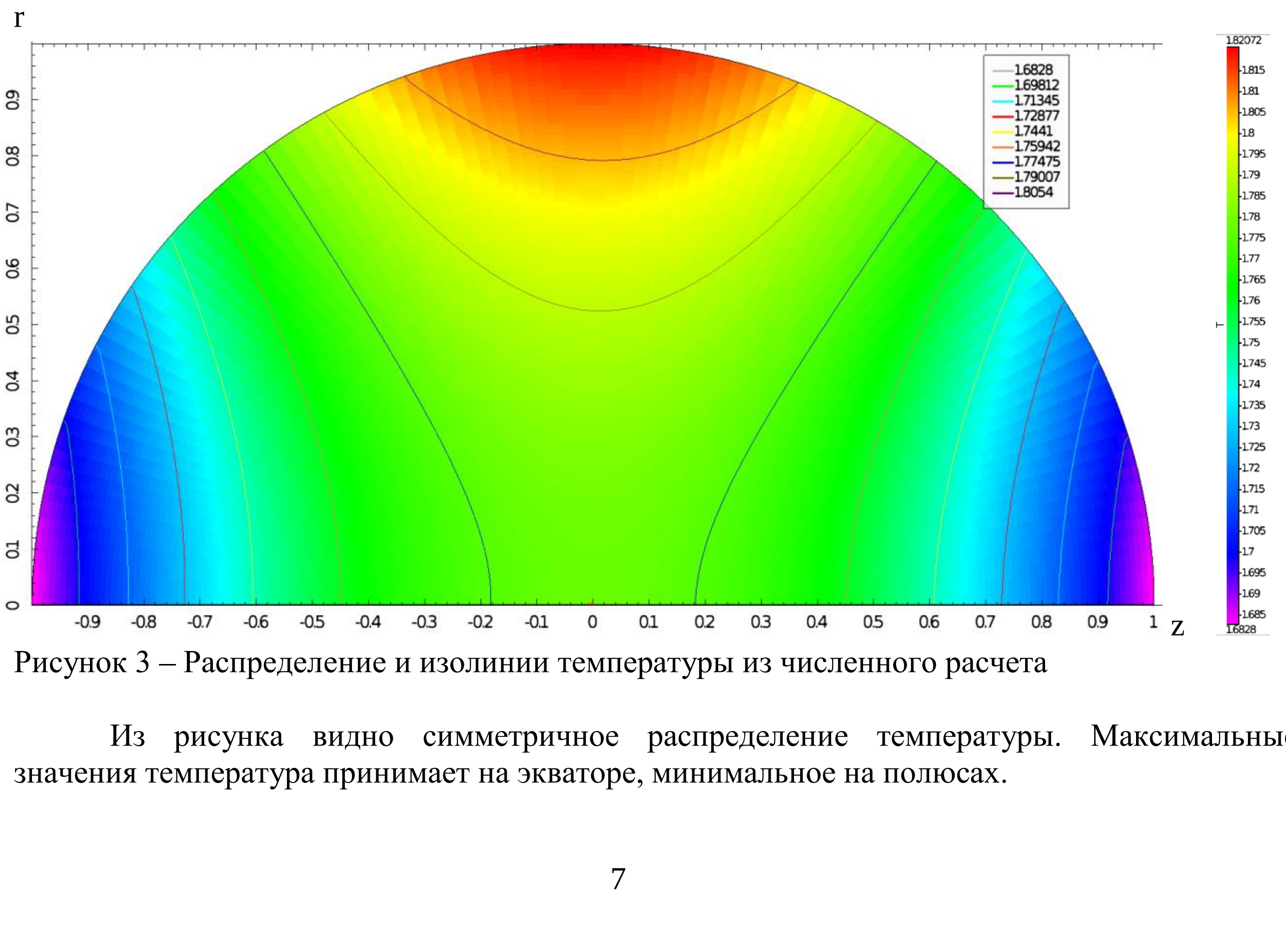

Рисунок 3 – Распределение и изолинии температуры из численного расчета

Из рисунка видно симметричное распределение температуры. Максимальные значения температура принимает на экваторе, минимальное на полюсах.

Заключение

На основе аналитических решений, полученных в работе [1], в двумерном осесимметричном случае построена тестовая задача. Численные расчеты данной задачи проведены по нестационарной методике, решения которой с течением времени выходят на стационарные аналитические формулы.

Особенностью тестовой задачи является то, что она позволяет определять точно не только температуру, плотность и поток излучения, но и анизотропное распределение интенсивности по направлениям полета фотонов. Это позволяет оценивать точность квадратурных формул, используемых при аппроксимации поля излучения в фазовом пространстве Ω.

На данной задаче проанализирована точность квадратурных формул ES_n. Показано, что данные квадратуры дают монотонную сходимость интегральных величин (температуры и потока) к точному решению. Численные значения интенсивности показывают устойчивую погрешность не превышающую 0.1%.

Литература

1. Шестаков А.А. Точные решения стационарной системы уравнений переноса излучения и энергии в многомерном случае. ВАНТ, 2023, в.3, с.3-16.

2. Гаджиев А.Д., Селезнев В.Н., Шестаков А.А. DSn-метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели. ВАНТ, 2003, в.4, с.33-46.

3. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.